ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

1956

ТОМ 108

№ 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

Доклады Академии наук СССР
1956. Том 108, № 2

МАТЕМАТИКА

А. А. МУЧНИК

НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ПРОБЛЕМЫ СВОДИМОСТИ ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 27 II 1956)

В данной заметке дается решение проблемы сводимости рекурсивно перечислимых множеств (р. п. м.), поставленной в 1944 г. Постом [1].

1°. Определение 1. Набором мы называем конечную или бесконечную последовательность чисел *.

Определение 2. Предикатом мы называем набор, состоящий только из единиц и нулей.

Определение 3. Числа, входящие в набор h, называются компонентами h.

Набор интерпретируется как функция **, заданная на всех числах до $N \leqslant \infty$. Ю. Медведев в [2] рассмотрел функциональное представление (ф. п.) операторов, рассматриваемых на всюду определенных функциях (т. е. бесконечных наборах). Для всякого оператора T существует функция $\delta(w)$, определяющая преобразование Δ наборов в наборы, совпадающее с T на бесконечных наборах, преобразуемых оператором T в наборы (Медведев). Берется геделевская нумерация упорядоченных пар конечных наборов. Функция $\delta(w)$ определяет преобразование набора η в набор λ ($\Delta(\eta) = \lambda$) таким образом: $[d(w), d'(w)]$ — пара наборов с геделевским номером $\delta(w)$; скажем, что набор d является частью набора f, если для всякой компоненты d соответствующая компонента f определена и равна ей; два набора совместны, если один из этих является частью другого; если $d(w)$ — часть набора η, то $d'(w)$ — часть λ, и всякая часть λ является частью в некотором наборе $d'(w)$ таком, что $d(w)$ — часть η. Будем говорить, что функция $\delta(w)$ реализует ф. п. оператора T.

Ю. Медведев доказал, что для всякого частично рекурсивного оператора (ч. р. о.) T существует примитивно рекурсивная функция (п. р. ф.) $\delta(w)$, реализующая его ф. п. [2].

Аналогичные утверждения справедливы для предикатов и операторов, определенных на предикатах и преобразующих их в предикаты (Π-операторы, Π-о).

2°. Введем соотношение $\geqslant$ для наборов: $f \geqslant h$, если это соотношение выполнено для тех соответствующих компонент f и h, которые определены и в f, и в h. $\tilde{h}$ означает предикат, полученный из коночного предиката h продолжением нулями; $\tilde{h}$ совпадает с h для бесконечных предикатов h. Предикат ξ из h — $[h]_\xi$ есть часть $\tilde{h}$, составленная из ξ компонент $\tilde{h}$.

Определение 4. Дизъюнкцией предикатов $f_1, f_2, \ldots, f_s, \ldots$ $f_1 \vee f_2 \vee \ldots \vee f_s \vee \ldots - \bigvee_{s=1}^{\infty} f_s$ называется предикат f, i-я компонента которого — 0, если во всех предикатах f_s i-я компонента —0; —1, если в не-

* Под числом в заметке подразумевается натуральное число или 0.
** Рассматриваемые в заметке функции принимают значения чисел.

котором f_s i-я компонента — 1; в противном случае i-я компонента f неопределена.

Определение 5. Отрицание (отр.) 0—1, отр. 1—0, отр. предиката η — предикат $\neg\eta$, все компоненты которого суть отр. соответствующих компонент η.

Определение 6. Сцеплением предиката u по α (число) с предикатом f $(u, f)_\alpha = g$ называется предикат длины f, т. е. содержащий столько же компонент, совместный с $[u]_\alpha$ и такой, что компоненты g с номерами $>\alpha$ (если они определены) являются отр. соответствующих компонент f.

3°. Легко доказать существование универсального ф. п. для ч. р. *П*-о, т. е. п. р. ф. $\varphi(x, w)$ такой, что ф. п. всякого ч. р. *П*-о T реализуется функцией $\varphi_x(w) = \varphi(x, w)$. *П*-о T обозначим T_x.

Пересчитаем пары чисел (x, w) п. р. ф. $x(t)$ и $w(t)$.

$[f(t), f'(t)]$ — упорядоченная пара предикатов с геделевским номером $\varphi'_x[x(t), w(t)]$; $m(t)$ — длина $f(t)$; $m'(t)$ — длина $f'(t)$.

4°. Теорема 1. *Существуют р. п. нерекурсивные множества H_1 и H_2 такие, что для всех x $T_x(h_1) \neq h_2$ и $T_x(h_2) \neq h_1$, где h_1 и h_2 — характеристические функции (х. ф.) H_1 и H_2, соответственно, т. е. H_1 и H_2 не сводятся друг к другу ч. р. операторами.*

Определим р. п. последовательность чисел $r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_{2k} < < r_{2k+1} < \ldots$ и конечных предикатов $h_1(0)$, $h_1(1), \ldots, h_1(2k), \ldots$; $h_2(0)$, $h_2(1), \ldots$ Примем за r_0 — 0; $h_1(0)$ — $f(0)$; $h_2(0)$ — $\neg f'(0)$.

Пусть построены числа $r_0 < r_1 < \ldots < r_{2k}$ и предикаты $h_1(0)$, $h_1(1), \ldots$ $\ldots, h_1(2k)$; $h_2(0)$, $h_2(1), \ldots, h_2(2k)$.

Тогда $r_{2k+1} = \mu t$ *, удовлетворяющее следующим условиям:

I,1. $t > r_{2k}$.

I,2. $f(t) \geqslant h_2(2k)$.

I,3. $f(t)$ совместен с $[h_2(2k)]_{\alpha(t)}$, где $\alpha(t) = \max\{\alpha_1(t), \alpha_2(t)\}$, $\alpha_1(t) = \max\limits_{r_l < r_j}\{m(r_l)\} + 10$, $\alpha_2(t) = \max\limits_{r_l < r_j}\{m'(r_l)\} + 10$, а $r_j = \max\limits_{\substack{r_i < t \\ x(r_i) < x(t)}}\{r_i\}$.

I,4. Предикат $h_1(2k) \vee (h_1(2k), f'(t))_{\alpha(t)}$ несовместен с $f'(t)$.

I,5. Либо $x(t) \neq x(r_{2i+j})$ $(i < k)$ либо, обозначая $\max\limits_{\substack{x(r_{2i+1}) = x(t) \\ r_{2i+1} < t}}\{r_{2i+1}\} = r_{2m+1}$, $f(r_{2m+1})$ несовместен с $h_2(2k)$, либо $f'(r_{2m+1})$ совместен с $h_1(2k)$. За $h_2(2k+1)$ примем $h_2(2k) \vee f(r_{2k+1})$, за h_1 $(2k+1)$ — предикат $h_1(2k) \vee (h_1(2k), f'(r_{2k+1}))_{\alpha(r_{2k+1})}$.

$r_{2k+2} = \mu t$, удовлетворяющее условиям II,1—II,5, получающимся из I,1 — I,5, если заменить в них r_{2k} на r_{2k+1}, $h_1(2k)$ на $h_2(2k+1)$, $h_2(2k)$ на $h_1(2k+1)$, r_{2i+1} на r_{2i+2}, r_{2m+1} на r_{2m+2}.

Положим $h_1(2k+2) = h_1(2k+1) \vee f(r_{2k+2})$, $h_2(2k+2) = h_2(2k+1) \vee$ $\vee (h_2(2k+1), f'(r_{2k+2}))_{\alpha(r_{2k+2})}$.

Построенные последовательности являются вычислимыми, ибо условия I, 1—5 и II, 1—5 эффективно проверяются. Можно доказать, что эти последовательности р. п.

Поэтому наборы $h_1 = \bigvee\limits_{l=0}^{\infty} h_1(l)$ и $h_2 = \bigvee\limits_{l=0}^{\infty} h_2(l)$ — х. ф. р. п. м. H_1 и H_2, соответственно.

Доказательство теоремы 1 вытекает из лемм 1—7.

Лемма 1. *Для всякого числа x_0 существует не более конечного множества корней уравнения $x(r_i) = x_0$.*

Доказательство проводится индукцией по x_0.

* μt означает наименьшее t.

Лемма 2. x_0 — *некоторое число (произвольное). Если* s — *наименьшее число такое, что* $x(r_l) \geqslant x_0$ *при* $l > s$, *то существует не более одного четного и не более одного нечетного* $l > s$ *таких, что* $x(r_l) = x_0$.

Лемма 3. *Пусть* s *определено из условий леммы* 2. *Тогда предикат* $[h_1(s)]_{\lambda_1(s)+10}$ *совместен с* h_1, *а* $[h_2(s)]_{\lambda_2(s)+10}$ *совместен с* h_2, *где* $\lambda_1(s)$ — *длина* $h_1(s)$, *а* $\lambda_2(s)$ — *длина* $h_2(s)$.

Отсюда следует:

Лемма 4. *И в* h_1, *и в* h_2 *бесконечно много нулей (т. е. дополнения к* H_1 *и к* H_2 *бесконечны).*

Лемма 5. *Последовательность* $r_0 < r_1 < \ldots < r_l < \ldots$ *бесконечна.*

Лемма 6. H_1 *и* H_2 — *гиперпростые множества* (1).

Лемма 7. $T_x(h_1) \neq h_2$ *и* $T_x(h_2) \neq h_1$ *при любом* x.

Теорема 1 может быть значительно усилена.

Теорема 2. *Существует р. п. последовательность гиперпростых р. п. м.* $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$, *члены которой попарно не сводимы друг к другу ч. р. о.*

Теорема 3. *Каково бы ни было р. п. нерекурсивное множество* G, *существует гиперпростое р. п. м.* H, *которое сводится к* G *и к которому* G *не сводится ч. р. о.*

5°. Дальнейшие результаты (как и предыдущие) относятся к исчислению массовых проблем, созданному Ю. Медведевым (2).

Следуя Медведеву, назовем массовой проблемой A всякий класс функций (всюду определенных) $\{A\}$ и скажем, что проблема A сводится к проблеме B ($A \leqslant B$), если существует ч. р. о. T, преобразующий всякую функцию класса $\{B\}$ в функцию класса $\{A\}$. Если $A \leqslant B$, но $B \nleqslant A$, то запишем, что $A \prec B$. Если $A \nleqslant B$ и $B \nleqslant A$, то назовем A и B несравнимыми проблемами ($A \times B$).

Рассмотрим проблему A_ψ продолжаемости ч. р. функции $\psi(n)$, состоящую из всех функций, совпадающих с $\psi(n)$ в точках, где $\psi(n)$ определена. Пусть проблема B состоит из одной функции.

Теорема 4. *Если проблема* B *сводится к* A_ψ, *то* B — *разрешимая проблема.*

Следствие. Если проблема разрешимости множества E сводится к какой-нибудь проблеме отделимости р. п. м., то множество E рекурсивно.

Теорема 5. *Для всякой пары рекурсивно (р.)-неотделимых р. п. м.* E_1 *и* E_2 *существует р. п. нерекурсивное множество* H *такое, что проблема отделимости* E_1 *и* E_2 *не сводится к проблеме разрешимости* H.

Теорема 6. *Существует р. п. последовательность попарно несравнимых проблем отделимости р. п. множеств.*

Теорема 7. *Для всякой неразрешимой проблемы* $A_{E_1E_2}$ *отделимости р. п. м.* E_1 *и* E_2 *существует проблема отделимости* $A_{H_1H_2}$ *р-неотделимых р. п. м.* H_1 *и* H_2 *такая, что* $A_{E_1E_2} \nleqslant A_{H_1H_2}$.

6°. Метод, примененный к доказательству теорем 1, 2, 5—7, позволяет исследовать целый ряд задач исчисления массовых проблем и некоторые другие вопросы.

Обозначая A_n-м. рекурсивно проективное (р. пр.) множество класса n, B_n-ф. — р. пр. функцию класса n * (3), назовем B_n-оператором оператор T, ф. п. которого реализует некоторая B_n-ф. $\delta(w)$. Проблему M назовем B_n-разрешимой, если она содержит хотя бы одну B_n-ф. B_n-м. — множество, х. ф. которого B_n-ф.

Теоремы 1—3, 5—7 остаются в силе, если заменить в них р. п. м. на A_n-м., а сводимость ч. р. о. на сводимость B_n-операторами, причем доказательства обобщенных теорем по методу сходны с доказательствами теорем 1—3, 5—7.

Теорема 4 также обобщается при замене ч. р. ф. на частичную B_n-ф.

---

* Имеется в виду классификация Клини-Мостовского.

(ч. B_n-ф.), т. е. на B_n-ф., быть может, не всюду определенную, а разрешимости — на B_n-разрешимость.

Сводимость B_n-операторами — B_n-сводимость — является уточнением интуитивного представления о сводимости проблем при условии разрешимости всех A_{n-1}-м. или, что то же самое, перечислимости всех A_n-м. Можно построить такое A_{n-1}-м. E (универсальное), что если проблема M B_n-сводится к проблеме L, то $M \lesssim L_1$, где L_1 — коньюнкция ([2]) проблемы L и проблемы разрешимости $E\,(L \cup A_E)$. Обратно, если $M \lesssim L \cup A_E$, то проблема M B_n-сводится к L. Для того чтобы множество E обладало указанными свойствами, необходимо и достаточно, чтобы оно было B_n-м. и чтобы всякое B_n-м. сводилось к нему.

Московский государственный
педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
20 II 1956

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. L. Post, Bull. Am. Math. Soc., 50, 284 (1944). [2] Ю. Медведев, Диссертация, МГУ, 1955. [3] S. C. Kleene, Trans. Am. Math. Soc., 53 (1943). [4] J. C. E. Dekker, Proc. Am. Math. Soc., 5, № 5 (1954).

Doklady AN SSSR
1956. Volume 108, No. 2

MATHEMATICS

A[lbert] A. MUCHNIK

NEGATIVE ANSWER TO THE REDUCIBILITY PROBLEM IN THE THEORY OF ALGORITHMS

(*Submitted by academician M.A. Lavrentiev, February 27, 1956*)

In this note we provide a solution to the problem of reducibility for recursively [computably] enumerable sets posed in 1944 by Post [1].

1. DEFINITION 1. A *tuple* is a finite or an infinite sequence of numbers.[1]

DEFINITION 2. A *predicate* is a tuple that contains only zeros and ones.

DEFINITION 3. Numbers that appear in a tuple h are called *components* of h.

A tuple is considered as a function[2] defined on numbers smaller than some $N \leqslant \infty$. Y[ury] Medvedev in [2] considered a functional representation of operators acting on total functions (i.e., infinite tuples). For every operator T there exists a function $\delta(w)$ that determines a transformation Δ acting on tuples; this transformation coincides with T on infinite tuples that are mapped by T into tuples (Medvedev). Consider the Gödel numbering of ordered pairs of finite tuples. The function $\delta(w)$ defines the corresponding mapping T of a tuple η into a tuple λ (so $\Delta(\eta) = \lambda$) as follows. Let $[d(w), d'(w)]$ be a pair of tuples that has Gödel number $\delta(w)$. We say that a tuple d is a *part* of a tuple f if every component of d exists (and is the same) in f; we say two tuples are *consistent* if one of them is a part of the other one; if $d(w)$ is a part of the tuple η, then $d'(\omega)$ is a part of λ, and every part of λ appears as a part of some $d'(w)$ such that $d(w)$ is a part of T. We say that the function $\delta(w)$ provides a functional representation of T.

Yu. Medvedev has shown that for every partial recursive operator T there exists a primitive recursive function $\delta(w)$ that represents it [2].

A similar statements are true for predicates and operators transforming predicates into predicates (Π-operators).

2. Let us introduce are relation $\geqslant$ on tuples; namely, $f \geqslant h$, if this inequality holds component-wise for the components of the tuples that are defined both in f and h [and have the same index]. By $\widetilde{h}$ we denote an infinite tuple obtained from h by adding trailing zeros; if h is infinite, we have $\widetilde{h} = h$.

[1] By numbers we mean natural numbers, including 0.

[2] In this paper we consider functions whose arguments and values are numbers.

DEFINITION 4. The *disjunction* of predicates $f_1, f_2, \ldots, f_s, \ldots$ (denoted by $f_1 \vee f_2 \vee f_3 \vee \ldots \vee f_s \vee \ldots$ or $\vee_{s=1}^{\infty} f_s$) is a predicate f whose ith component is

- 0, if all the predicates f_s have ith component 0;
- 1, if some predicate f_s has ith component 1;
- undefined otherwise [i.e., if some predicates have ith component 0 and others are undefined there].

DEFINITION 5. The *negation* of a predicate η is a predicate $\neg\eta$ whose components are negations of the corresponding components of η.

DEFINITION 6. A *mixture* [сцепление] of a predicate u with a predicate f at point α (where α is a number), denoted by $g = (u, f)_\alpha$, is a predicate that has the same length as f that is compatible with $[u]_\alpha$ [=the prefix of u of length α] and whose components with indices greater than α are the negations of the corresponding components of f. [We start as in u and after α terms switch to the negation of f.]

3. It is easy to show there exists a *universal* functional representation for partial recursive operators on predicates, i.e., a primitive recursive function $\varphi(x, w)$ such that every partial recursive operator T has a functional representation by a function $\varphi_x(w) = \varphi(x, w)$. The latter operator is denoted by T_x.

Let two primitive recursive function $x(t)$ and $w(t)$ enumerate all pairs (x, w) of numbers. Let $[f(t), f'(t)]$ be an ordered pair of predicates with Gödel number $\varphi[x(t), w(t)]$; let $m(t)$ and $m'(t)$ be the lengths of $f(t)$ and $f'(t)$ respectively.

4. THEOREM 1. *There exist a recursive enumerable non-recursive sets H_1 and H_2 such that $T_x(h_1) \neq h_2$ and $T_x(h_2) \neq h_1$ for all x; here h_1 and h_2 are characteristic functions of H_1 and H_2 respectively. In other words, H_1 and H_2 are not reducible to each other by partial recursive operators.*

Let us construct a recursively enumerable sequences of numbers $r_0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_{2k} < r_{2k+1} < \ldots$ and finite predicates $h_1(0), h_1(1), \ldots, h_1(2k), \ldots$, and $h_2(0), h_2(1), \ldots, h_2(2k)$ in the following way. We let $r_0 = 0$, $h_1(0) = f(0)$, $h_2(0) = \neg f'(0)$.

Assume that the numbers $r_0 < r_1 < \ldots < r_{2k}$ are already constructed, as well as the predicates $h_1(0), h_1(1), \ldots, h_1(2k)$ and $h_2(0), h_2(1), \ldots, h_2(2k)$.

Then r_{2k+1} is the minimal number t that satisfies the following requirements:

I, 1. $t > r_{2k}$.

I,2. $f(t) \geqslant h_2(2k)$.

I,3. $f(t)$ is consistent with $[h_2(2k)]_{\alpha(t)}$, where

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \max\{\alpha_1(t), \alpha_2(t)\}, \\ \alpha_1(t) &= \max_{r_l \leqslant r_j}\{m(r_l)\} + 10, \\ \alpha_2(t) &= \max_{r_l \leqslant r_j}\{m'(r_l)\} + 10, \\ r_j &= \max_{r_i < t,\ x(r_i) \leqslant x(t)}\{r_i\}. \end{aligned}$$

I,4. Predicate $h_1(2k) \vee (h_1(2k), f'(t))_{\alpha(t)}$ is inconsistent with $f'(t)$.

I,5. Either $x(t) \neq x(r_{2i+j})$ $(i < k)$, or, denoting

$$\max_{x(r_{2i+1})=x(t),\ r_{2i+1}<t}\{r_{2i+1}\}$$

by r_{2m+1}, we have $f(r_{2m+1})$ inconsistent with $h_2(2k)$, or $f'(r_{2m+1})$ is consistent with $h_1(2k)$. We let $h_2(2k+1)$ to be $h_2(2k) \vee f(r_{2k+1})$, and let $h_1(2k+1)$ be the predicate $h_1(2k) \vee (h_1(2k), f'(r_{2k+1}))_{\alpha(r_{2k+1})}$.

We also let r_{2k+2} be the minimal value of t that satisfies the conditions II,1–II,5 that are obtained from I,1–I,5 by replacing r_{2k} by r_{2k+1}, $h_1(2k)$ by $h_2(2k+1)$, $h_2(2k)$ by $h_1(2k+1)$, r_{2i+1} by r_{2i+2}, r_{2m+1} by r_{2m+2}.

Let

$$\begin{aligned} h_1(2k+2) &= h_1(2k+1) \vee f(r_{2k+2}), \\ h_2(2k+2) &= h_2(2k+1) \vee (h_2(2k+1), f'(r_{2k+2}))_{\alpha(r_{2k+2})}. \end{aligned}$$

The sequences we constructed are computable because the conditions I,1–5 and II,1–5 can be checked effectively. One can show that these sequences are recursively enumerable.

Therefore the tuples $h_1 = \vee_{l=0}^{\infty} h_1(l)$ and $h_2 = \vee_{l=0}^{\infty} h_2(l)$ are characteristic functions of some recursively enumerable sets H_1 and H_2. Now the proof of Theorem 1 can be finished by using the following lemmas 1–7.

LEMMA 1. *For every number x_0 the equation $x(r_i) = x_0$ has only finitely many solutions.*

Proof: induction over x_0.

LEMMA 2. *Let x_0 be an arbitrary number. If s is the minimal number such that $x(r_l) \geqslant x_0$ for all $l > s$, there is at most one even and at most one odd number $l > s$ such that $x(r_l) = x_0$.*

LEMMA 3. *Assume that s satisfies the conditions from Lemma 2. Then the predicate $[h_1(s)]_{\lambda_1(s)+10}$ is consistent with h_1, and the predicate $[h_2(s)]_{\lambda_2(s)+10}$*

is consistent with h_2, where $\lambda_1(s)$ and $\lambda_2(s)$ are the lengths of $h_1(s)$ and $h_2(s)$ respectively.

This implies that:

LEMMA 4. *Both h_1 and h_2 contain infinitely many zeros; in other words, complements to H_1 and H_2 are infinite.*

LEMMA 5. *The sequence $r_0 < r_1 < \ldots < r_l < \ldots$ is infinite.*

LEMMA 6. *The sets H_1 and H_2 are hypersimple sets*, see [1].

LEMMA 7. *We have $T_x(h_1) \neq h_2$ and $T_x(h_2) \neq h_1$ for every x.*

A much stronger version of Theorem 1 can be proven:

THEOREM 2. *There exists a recursively enumerable sequence of hypersimple recursive enumerable sets $H_1, H_2, \ldots$ such that any two sets in this sequence are not reducible to each other by a partial recursive operator.*

THEOREM 3. *For every recursive enumerable non-recursive set G there exists a hypersimple recursively enumerable set H that is reducible to G but G is not reducible to H by a partial recursive operator.*

5. The following results deal with *mass problems* in the sense of Yu. Medvedev [2].

Following Medvedev, a mass problem A is an arbitrary class of total functions. We say that problem A is reducible to problem B (notation: $A \preceq B$) if there exists a partial recursive operator that maps every function in B to some function in A. If $A \preceq B$ but not $B \preceq A$, we write $A \prec B$. If $A \not\preceq B$ and $B \not\preceq A$, the problems A and B are called *incomparable* mass problems.

For a partial function ψ we consider an *extension* mass problem A_ψ that consists of all total extensions of ψ (total functions that coincide with ψ at the points where ψ is defined). Let B be a mass problem that contains only one function.

THEOREM 4. *If B is reducible to A_ψ, then the problem B is decidable* [i.e., the only element of B is computable].

COROLLARY. If a decision problem for some set E is reducible to the separation problem for some pair of recursively enumerable sets, then E is decidable.

THEOREM 5. *For every pair of recursively inseparable recursively enumerable sets E_1 and E_2 there exists a recursively enumerable non-recursive set H such that the separation problem for E_1 and E_2 is not reducible to the decision problem for H.*

THEOREM 6. *There exists a recursively enumerable sequence of mutually incomparable separation problems for recursively enumerable sets.*

THEOREM 7. *For every undecidable separation problem A_{E_1,E_2} for recursively enumerable sets E_1 and E_2 there exists a separation problem A_{H_1,H_2} for inseparable recursive enumerable sets H_1, H_2 such that $A_{E_1,E_2} \not\preceq A_{H_1,H_2}$.*

6. The tools used to prove Theorems 1, 2, 5–7 can be applied to several questions about mass problems (and some other questions).

By A_n-set we mean the recursively projective set from the nth class[3]; by B_n-function we mean recursively projective function from class n. We consider B_n-operators whose function representation is given by some B_n-function $\delta(w)$. A [mass] problem M is called B_n-decidable if it contains at least one B_n-function. By B_n-set we mean a set whose characteristic function is a B_n-function.

Theorems 1–3, 5–7 remain valid if we replace recursive enumerable sets by A_n-sets, and reducibility by partial recursive operators by reducibility by B_n-operators, and these generalizations can be proved in a similar way.

Theorem 4 can also be generalized by replacing partial recursive functions by partial B_n-functions, and decidability by B_n-decidability.

The reduction by B_n-operators can be considered as a formal version of an intuitive notion of reduction assuming that all A_{n-1}-sets are decidable (or, equivalently, all A_n-sets are enumerable). One can construct an A_{n-1}-set E that is *universal* in the following sense: if a problem M is B_n-reducible to a problem L, then $M \preceq L_1$, where L_1 is a conjunction (in the sense of [2]) of L and the decision problem for E (this conjunction is denoted by $L \cup A_E$). On the other hand, if $M \preceq L \cup A_E$, then problem M is B_n-reducible to L. For the set E to have this universality property it is necessary and sufficient that E is a B_n-set and every B_n-set is reducible to E.

Moscow State Lenin
Pedagogical Institute

Submitted
February 20, 1956

References

[1] E.L. Post, [Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems], Bull[etin of the] Am[erican] Math[ematical] Soc[iety], **50**, 284 (1944) [`https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1944-08111-1`]

[2] Y[ury Tikhonovich] Medvedev, Ph.D. thesis, Moscow State University, 1955.

[3] S.C. Kleene, Trans[actions of the] Am[erican] Math[ematical] Soc[iety], **53** (1943)

[4] J.C.E. Dekker, Proc[eedings of the] Am[erican] Math[ematical] Soc[iety], **5**, no. 5 (1954)

Translated by Alexander Shen, December 2022
`sasha.shen@gmail.com`

[3] We consider here Kleene–Mostowski hierarchy. [So B_n-sets are Σ^0_n-sets; B_n-functions are functions whose graphs are Σ^0_n-sets.]